ISG 2004 Option économique

EXERCICE 1

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs a et b.

1. Établir que la variable aléatoire $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $a+b$.
2. Soit n un entier naturel. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X+Y=n$
3. On considère deux échantillons d'articles produits en série et les nombres X et Y d'articles défectueux dans chacun des deux échantillons suivent les lois de Poisson de paramètres respectifs 2 et 3. On suppose X et Y indépendants.On réunit les deux échantillons
   (a) Quelle est la loi suivie par le nombre d'articles défectueux dans cette réunion ?
   (b) Sachant que le nombre total d'articles défectueux est 3, quelle est la probabilité de l'événement $(X<2)$
4. On suppose que le nombre d'articles de la réunion de ces deux échantillons est N et que le nombre d'articles défectueux est n.
   On tire successivement les articles au hasard pour les contrôler (tirages sans remise et équiprobables).
   (a) Pour tout entier k tel que $1<k<N-n$, calculer la probabilité p_k de l'événement « les k premiers articles contrôlés ne sont pas défectueux »
   (b) On désigne par Z la variable aléatoire indiquant le rang du premier article défectueux contrôlé. Montrer que Z prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1;2;...;N-n+1\}$. Déterminer la loi de Z
   (c) Calculer l'espérance et la variance de Z lorsque $n=1$, puis pour $n=2$.
   (d) On suppose dans cette question que $N=98$ et $n=2$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un majorant de la probabilité de l'événement $|3Z-99|>210$.
   (e) On désigne par T la variable aléatoire indiquant le rang du deuxième article défectueux contrôlé. Déterminer la loi de T , puis calculer son espérance et sa variance dans le cas où $n=2$.

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{(\ln(x))^n} & \text{si } x\in\,]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que f_n, est continue sur $\mathbb{R}_+\backslash\{1\}$.
2. En discutant suivant la parité de n , étudier les variations de f_n.
3. On note u_n l'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentative de f_n
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. On note $I_n=\int_0^{\frac{1}{e}} f_n(x)\,dx$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $|I_n| \leqslant \frac{1}{e}$.

(b) On note $I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{1}{e}} f_n\,(x)\,dx$ où $0 < \alpha < \frac{1}{e}$.
Pour tout entier naturel non nul n , exprimer $I_{n+l}(\alpha)$ en fonction de n et $I_n(\alpha)$.

(c) En déduire une expression de I_{n+l} en fonction de n et I_n.

(d) Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge vers zéro.

EXERCICE 3

On note $B = (e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = -e_1 - e_2 + 2e_3; \quad f(e_2) = -e_1; \quad f(e_3) = -e_1 + e_3.$$

Soit M la matrice de f dans la base B. On notera $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels et I la matrice identité.

1. Déterminer M. Calculer M^2.

2. Montrer que $M^3 = -I$ et en déduire que M est inversible. Déterminer son inverse M^{-1}.

3. Soit B' le système de vecteurs $(u; v; w)$ défini par

$$u = e_1 + e_2 - e_3; \quad v = e_1 - e_2; \quad w = e_1 - 2e_3$$

   (a) Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer la matrice de f dans la base B' notée M'.

4. Montrer que la famille $\{I; M; M^2\}$ est libre.

5. Soit E l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ du type $aI + bM + cM^2$ où a, b et c sont réels.
Montrer que E est un espace vectoriel dont on donnera une base.

6. Montrer que si A est élément de E , A est inversible si et seulement si $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc \neq 0$.
Montrer alors que son inverse est élément de E.

7. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f.
L'endomorphisme f est-il bijectif ?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?